

# Variaciones al modelo celular de flujo de tráfico vehicular de Nagel-Schreckenberg

E. Soria-Porto<sup>1</sup>, G. Téllez-Castillo<sup>2</sup>, J. Figueroa-Nazuno<sup>2</sup>, M.A. Gutiérrez-Villegas<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco

Av. Sn Pablo 180, Col Reynosa Tamaulipas, México, D.F.

<sup>2</sup>Centro de Investigación en Computación

Av. Juan de Dios Batíz S/N

Unidad Profesional "Adolfo López Mateos", Zacatenco, 07738, México, D.F.

Tel. 5729 6000 ext 56526

e-mail: [gtellez@clc.ipn.mx](mailto:gtellez@clc.ipn.mx) [jfn@clc.ipn.mx](mailto:jfn@clc.ipn.mx)

## RESUMEN

Mediciones sobre el tráfico real han revelado la existencia de estados meta-estables. Tales estados no son observados en el modelo de autómatas celulares de Nagel-Schreckenberg el cual es un modelo para la descripción de tráfico vehicular. En este trabajo implementamos una modificación a dicho modelo y mostramos como con esta modificaron, el modelo exhibe estados meta-estables.

Palabras claves: autómatas celulares, meta-estabilidad.

## 1. INTRODUCCIÓN

Para entender el comportamiento del flujo de tráfico, varios modelos han sido propuestos. Tradicionalmente son distinguidos dos tipos de modelos; los microscópicos (que incluye los modelos carro-siguiente [1-7] y los modelos con autómatas celulares, AC [8, 9,10,11]) y los macroscópicos (que incluye los modelos gas-cinético [12] y los modelos hidrodinámicos [13,14,19,20]). Los modelos microscópicos describen el comportamiento del tráfico como entidades discretas interactuando unas con otras. Ellos van desde los modelos analíticos simples, tales como los modelos de carro-siguiente [17], a modelos de simulación detallada, FRESIM [16] y el software de simulación NETSIM [14]. Los modelos macroscópicos describen el comportamiento del tráfico caracterizando las relaciones fundamentales entre velocidad del vehículo, flujo y densidad [4]

En 1992, Nagel y Schreckenberg (N-S) [11] propusieron un AC probabilístico para la descripción de tráfico vehicular en una vía rápida de un solo carril. Este modelo es capaz de reproducir, usando reglas simples, los fenómenos básicos encontrados en el tráfico real.. Pero este modelo no puede

explicar todos los fenómenos observados experimentalmente en el tráfico de las vías rápidas.

De ahí que, para intentar explicar otras manifestaciones distintas a las "básicas" se hace necesario realizar modificaciones o agregar nuevas reglas al AC original. En particular, una de las propiedades observadas experimentalmente es: Entre las regiones estable e inestable (flujo laminar y congestionado, respectivamente) existe un intervalo de densidad donde el tráfico es metaestable. Tales estados no pueden ser observados en el modelo de N-S; considerado como un AC básico para descripción de tráfico vehicular.

Mediciones llevadas a cabo (entre 1991 y 1995) por Kerner y Rehborn, K-R, [20,21,22] reportaron algunas propiedades empíricas características del flujo de tráfico de autos en vías rápidas en Alemania (entre estos fenómenos identificaron la ocurrencia de metaestabilidad). Estos datos empíricos han podido ser corroborados en otros estudios en diferentes países. Es pues generalmente aceptado, que las propiedades observadas por K-R son rasgos genéricos del flujo vehicular. Es decir, cualquier modelo de flujo de tráfico que intente describir realmente esta clase de fenómenos deberá desplegar las propiedades mencionadas.

En este trabajo presentamos algunas modificaciones al AC de N-S de forma tal que el comportamiento obtenido a partir del AC modificado, presente metaestabilidad. En este trabajo esta organizado de la siguiente forma: la sección 2 describe el modelo de N-S, la parte 3 consideraciones sobre los parámetros, la parte 4 se considera los resultados de la simulación de N-S, la sección 5 se trata el concepto de meta estabilidad, la sección 6 considera el modelo modificado, la sección 7 se comenta los resultados de la simulación del modelo modificado y por ultimo en la sección 8 se dan las conclusiones.

## 2. EL MODELO CELULAR DE NAGEL Y SCHRECKENBERG (N-S)

En un AC el espacio, tiempo y las variables de estado son discretas [21]. En el modelo N-S se define una vía de circulación unidimensional descrita por un arreglo que posee  $L$  sitios (células) denotados por  $x_n$ . Cada sitio puede estar o no ocupado por uno de los  $N$  vehículos del sistema. Cada vehículo en el autómata tiene una velocidad entera  $v = 0, 1, 2, \dots, v_{max}$ . Si el  $n$ -ésimo vehículo está caracterizado por  $x_n$  y  $v_n$ , entonces  $d_n = x_{n+1} - x_n$ , es el espacio que hay entre el  $n$ -ésimo vehículo y el que se encuentra en frente de él al tiempo  $t$ .

A cada unidad de tiempo (iteración)  $t \rightarrow t + 1$ , el arreglo es actualizado en paralelo para todos los autos sobre la base de las reglas siguientes:

Para cada  $n$ -ésimo vehículo:

- Paso 1. *Aceleración*

Si  $v_n < v_{max}$ , la velocidad es actualizada a  $v_n \rightarrow \min(v_n + 1, v_{max})$

- Paso 2. *Desaceleración* (a causa del auto siguiente)

Si  $d_n \leq v_n$ , la velocidad es decrementada a  $v_n \rightarrow \min(v_n, d_n - 1)$

- Paso 3. *Aleatoriedad*

Si  $v_n > 0$ , la velocidad es reducida a  $v_n \rightarrow \max(v_n - 1, 0)$  con probabilidad  $p$  ( $p = cte.$ )

- Paso 4. *Movimiento*

La posición es actualizada a  $x_n \rightarrow x_n + v_n$

En términos prácticos, el paso 1 refleja la tendencia general de los conductores a manejar lo más rápido posible sin exceder el límite de velocidad. El paso 2 refleja una distancia prudente para evitar colisiones. El paso 3 considera diferentes factores que inducen a una reducción de la velocidad del vehículo (v.g. exageración en la distancia hacia el auto siguiente). El paso 4 es simplemente el avance del vehículo. Además el paso 3 (aleatoriedad) es importante para la reproducción de fenómenos observables en el tráfico real. Su eliminación conduce a un comportamiento predecible y estable.

## 3. Consideraciones sobre la densidad y flujo

La manera más simple de emplear el modelo N-S considerando un camino cerrado a modo de una autopista de carreras (de un solo carril). Para el instante de tiempo  $t$  es posible definir la constante de densidad

$$\rho = \frac{N}{L} \tag{1}$$

Sin embargo esto no es un caso realista dado que en las vías rápidas existe un constante aumento y/o disminución de automóviles que ingresan o salen de ellas. Por ello con intención de definir fenómenos más realistas se define un parámetro de densidad en un sitio fijo  $i$  promediado sobre un periodo de tiempo  $T$ :

$$\rho^T = \frac{1}{T} \sum_{t=t_0}^{t_0+T} n_i(t) \tag{2}$$

donde  $n_i(t) = 0(1)$  si el sitio está vacío (ocupado). Cabe explicar que para  $T$  muy grandes

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \rho^T = \rho \tag{3}$$

Por tanto, para las simulaciones que se presentarán, supondremos que el parámetro  $\rho$  como la constante general de densidad del sistema.

Además, con intención de describir la "cantidad movimiento" en el sistema, se define el flujo promedio entre los sitios  $i$  e  $i+1$  como

$$\bar{q}^T = \frac{1}{T} \sum_{t=t_0}^{t_0+T} n_{i,j-1}(t) \tag{4}$$

donde  $n_{i,i+1}(t) = 1$  si se detecta movimiento entre los sitios  $i$  e  $i+1$  durante el paso de tiempo  $t \rightarrow t + 1$  igual a iteración.

## 4. Resultados de N-S

N-S fue originalmente programado en FORTRAN simulado usando una  $v_{max} = 5$  para casos de alta y densidad.

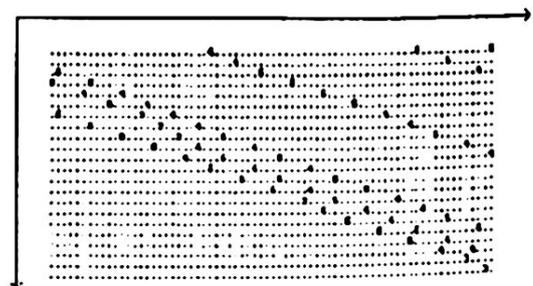


FIG. 4.1 Simulación de N-S con  $\rho = 0.03$  y  $v_{max} = 5$

La figura 4.1 muestra tráfico de baja densidad con 0.03 por sitio. A bajas densidades se observa flujo laminar. Cada nueva línea muestra el carril de flujo después de actualización completa y justo antes del movimiento de los

autos. Los sitios vacíos son representados mediante un punto mientras que los ocupados son mostrados con un número entero correspondiente a la velocidad del auto.

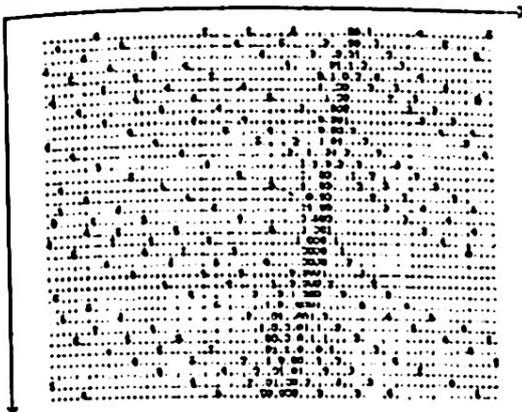


FIG. 4.2 Simulación de N-S con  $\rho = 0.1$  y  $v_{max} = 5$

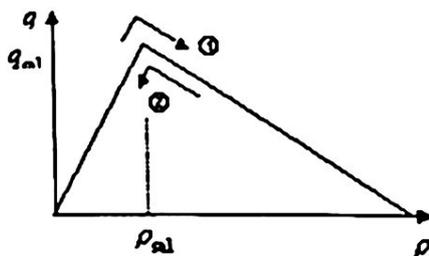


FIG. 4.3 Localización de  $q_{sal}$  en N-S. (1) Indica una transición del sistema de flujo laminar a congestión. (2) Indica una transición del sistema de congestión a flujo laminar.

La figura 4.2 muestra ahora tráfico de más alta densidad, con  $\rho = 0.1$  por sitio. Nótese el movimiento en contraflujo del congestionamiento formado.

### Flujo de salida de un congestionamiento en N-S

Hasta este momento hemos basado nuestros análisis del comportamiento de N-S utilizando el diagrama fundamental del mismo. En todos los casos previos hemos prestado atención en  $\forall \rho_i \in [0.0 .. 1.0], \rho_i < \rho_j$ . Es decir, hemos hecho una "lectura" de izquierda a derecha del diagrama fundamental puesto que encontramos natural que el sistema evolucione de tráfico laminar a congestionado. Sin embargo, si invertimos ahora el sentido de dicha lectura de modo que  $\forall \rho_i \in [0.0 .. 1.0], \rho_i > \rho_j$ , tenemos un proceso de "regresión" del sistema de estado congestionado a flujo laminar como se muestra en la figura 4.3.

Observemos que cuando la densidad del sistema es disminuida por debajo del valor  $\rho_{sal}$  nos encontramos en la región estable del diagrama fundamental. Considerando lo ya mostrado en la figura 2.5, encontramos que, para N-S,  $q_{sal} = q_{max}$ , lo cual está en contradicción con la conclusión 1. presentada en la sección 3. Este argumento nos llevó a

preguntar, cómo podríamos lograr que N-S tomara un comportamiento tal que  $q_{sal} < q_{max}$ , que es la conclusión 1. arriba mencionada.

### 5. Metaestabilidad en los flujos vehiculares

En el campo del tráfico vehicular la ocurrencia del fenómeno de metaestabilidad puede entenderse en los términos siguientes: perturbaciones suficientemente pequeñas (llamadas perturbaciones subcríticas) desaparecen recobrando el sistema un flujo continuo, mientras que perturbaciones supercríticas que excedan un cierto umbral causarán un congestionamiento.

En términos prácticos, podemos mostrar lo siguiente:

Para una densidad media, un conductor que exagere en la desaceleración de su auto a causa de la distancia que observa hacia el vehículo delante de él, provocará que el que viene detrás también desacelere de manera importante con relación al flujo máximo posible. En este orden podrían observarse ondas de choque (en contraflujo a la circulación) que consistirían en una perturbación al flujo vehicular. Sin embargo, dado que no se daría una interrupción total al flujo mismo, eventualmente el sistema se recobrará alcanzando un flujo mayor u óptimo. Este es un ejemplo de una perturbación subcrítica.

Para una densidad media o alta, un auto se ha descompuesto en un carril central de una vía de tres carriles. Evidentemente los autos detrás del que está detenido se pararán a su vez y, al intentar moverse hacia los carriles libres, detendrán a los vehículos que por ahí circulan. Eventualmente esta situación ocasionará un embotellamiento importante a causa de una perturbación supercrítica.

Existe relación entre el término metaestable y los diagramas fundamentales de los modelos de flujo de tráfico. Para el modelo N-S se tiene un diagrama fundamental del tipo que se muestra en la figura 5.1.

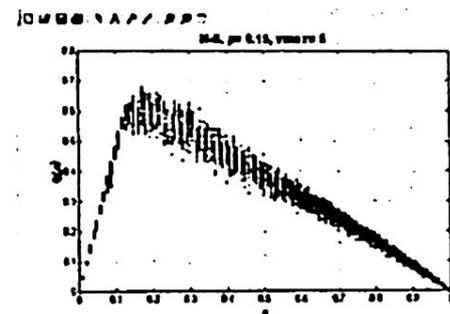


FIG. 5.1 Diagrama fundamental típico para el modelo de N-S.

En este diagrama se observa la existencia de un punto común entre la finalización de la región de flujo laminar y el inicio de la región de inestabilidad localizado en  $(\rho_{max}, q_{max})$ . Este fenómeno observable a partir del AC de N-S le llamaremos de *fases continuas*.

Sin embargo, de acuerdo a las observaciones experimentales llevadas a cabo por Kerner y Rehborn [20,21], este tipo de comportamiento no corresponde con el

tráfico de autos en la realidad. En la figura siguiente presentamos el diagrama tipo observado por K-R una vez realizados los promedios sobre los datos experimentales.

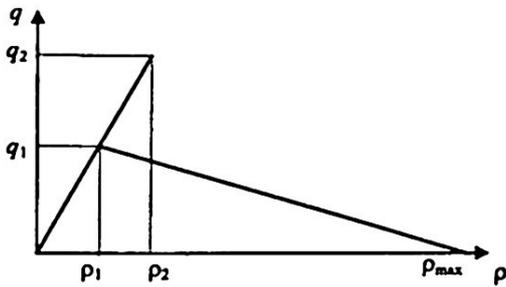
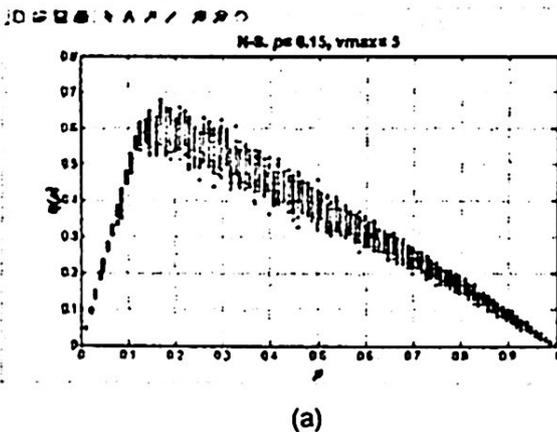


FIG. 5.2 Diagrama fundamental típico para observaciones experimentales. Aquí no se observan fases continuas

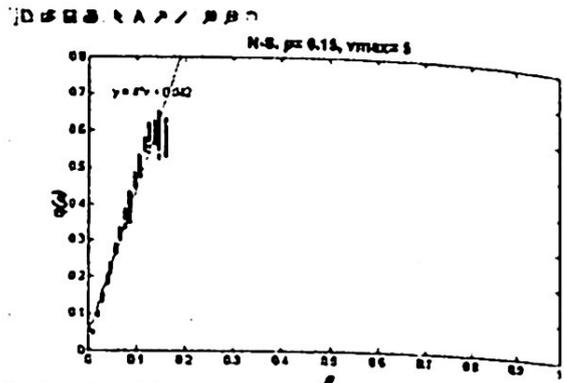
Claramente tenemos una diferencia notable entre el comportamiento de N-S y lo observado experimentalmente. En principio, observamos una región comprendida en  $0 \leq \rho < \rho_1$  que corresponde al flujo laminar del sistema; mientras que entre  $\rho_2 < \rho \leq \rho_{max}$  hallamos la región de congestión; ambas evidentemente "no continuas", al menos no como lo observado en la figura 5.2. A este comportamiento le denominaremos de *fases discontinuas*.

Aquí podemos señalar que en la región —a partir de  $(\rho_1, q_1)$ —, si ocurre una perturbación subcrítica, el sistema se recobrará y eventualmente seguirá siendo laminar —hacia  $(\rho_2, q_2)$ . En contraparte, si a partir de  $(\rho_1, q_1)$  se da el caso de una perturbación supercrítica, el comportamiento "doblará" hacia la región de inestabilidad dando paso a una disminución en el flujo medio del sistema y produciendo un congestionamiento

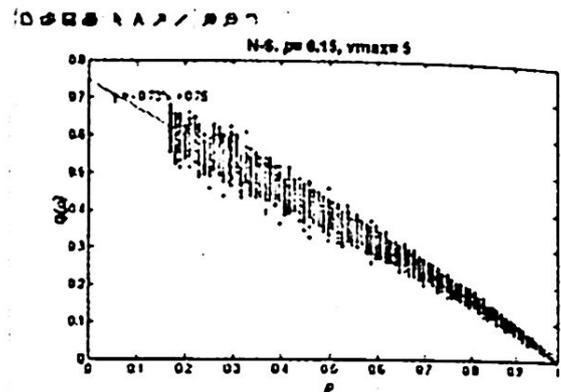
En las figuras 5.3 a, b, c y d mostramos el proceso de obtención del diagrama fundamental.



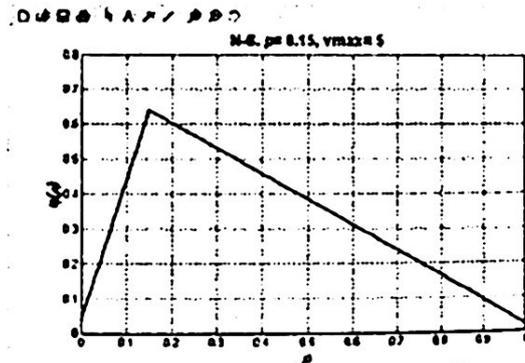
(a)



(b)



(c)



(d)

FIG. 5.3 Obtención del diagrama fundamental para el AC simulado.

- (a) Identificación de las regiones estable e inestable en colores distintos.
- (b) Obtención de la ecuación de ajuste para la región estable.
- (c) Obtención de la ecuación de ajuste para la región inestable.
- (d) El diagrama fundamental.

## 6. EL MODELO N-S+

La diferencia fundamental entre "N-S+" y N-S consiste en que la probabilidad de desaceleración de un auto dependería del valor de su velocidad; siendo grande para autos lentos y pequeña para autos rápidos.

En particular, solamente el paso 3 de las reglas de actualización del modelo N-S fue modificado. I.e.,

**Paso 3. Aleatoriedad**

Si  $v_n > 0$ , la velocidad es reducida a  $v_n \rightarrow \max(v_n - 1, 0)$  con probabilidad  $p$  ( $p = \text{cte.}$ )

Evidentemente ahora  $p$  no puede ser constante sino que  $p = f(v_n)$ .

Dado que el objetivo primario de este trabajo consiste en obtener estados metaestables, por simplicidad sólo reparamos en dos posibilidades para  $p$ ;

$$p = \begin{cases} p_{\max} & \text{si el auto se mueve con } v = 0 \\ p_{\min} & \text{si el auto se mueve con } v > 0 \end{cases}$$

mueve con  $v > 0$

con  $p_{\max}, p_{\min} = \text{ctes.}, p_{\max} > p_{\min}$

Con esta consideración queda entonces definido el comportamiento de N-S+:

A cada paso de tiempo (iteración)  $t \rightarrow t+1$ , el arreglo es actualizado *en paralelo* para todos los autos en base a las reglas siguientes:

Para cada  $n$ -ésimo vehículo:

▪ Paso 1. **Aceleración**

Si  $v_n < v_{\max}$ , la velocidad es actualizada a  $v_n \rightarrow \min(v_n + 1, v_{\max})$

▪ Paso 2. **Desaceleración** (a causa del auto siguiente)

Si  $d_n \leq v_n$ , la velocidad es decrementada a  $v_n \rightarrow \min(v_n, d_n - 1)$

**Paso 3. Aleatoriedad**

Si  $v_n = 0$ , la velocidad es mantenida a  $v_n \rightarrow v_n$  con probabilidad  $p_{\max}$

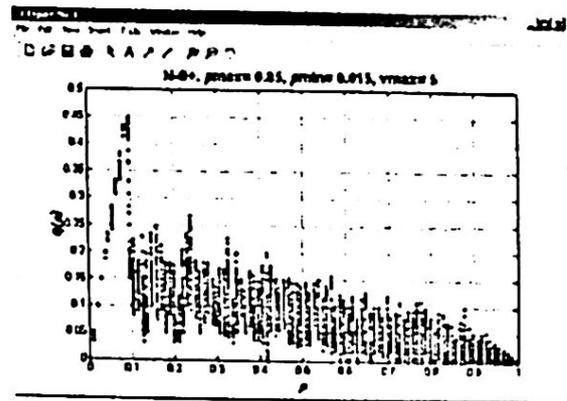
Si  $v_n > 0$ , la velocidad es reducida a  $v_n \rightarrow \max(v_n - 1, 0)$  con probabilidad  $p_{\min}$

▪ Paso 4. **Movimiento**

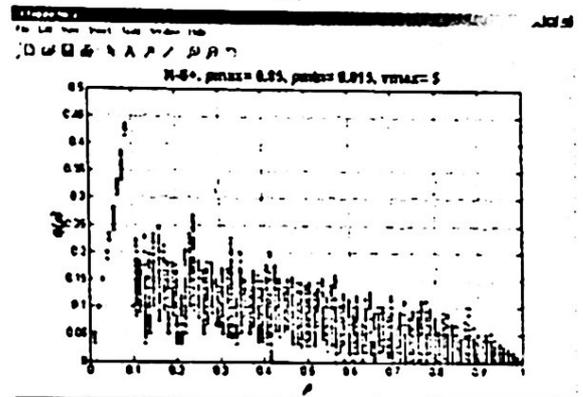
La posición es actualizada a  $x_n \rightarrow x_n + v_n$

**7. SIMULACIÓN DE N-S+**

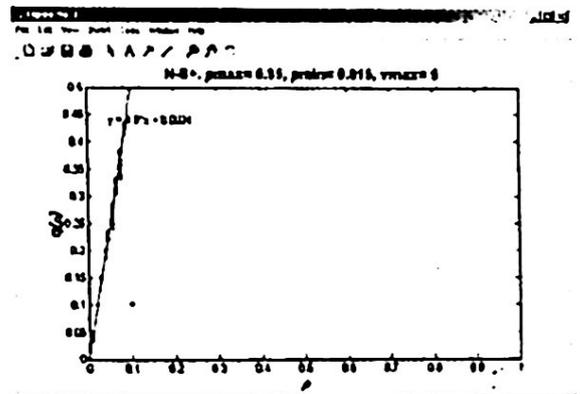
Aquí se hace variar la densidad  $\rho$  del AC de N-S+ en el rango de valores [0.0 .. 1.0]. La figura 7.1 a, b, c, d, e, muestra el proceso de obtención del diagrama fundamental.



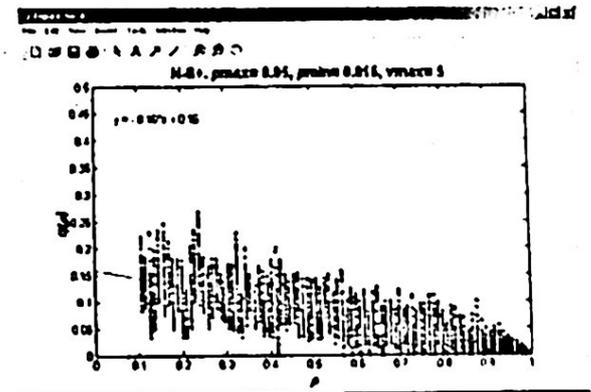
(a)

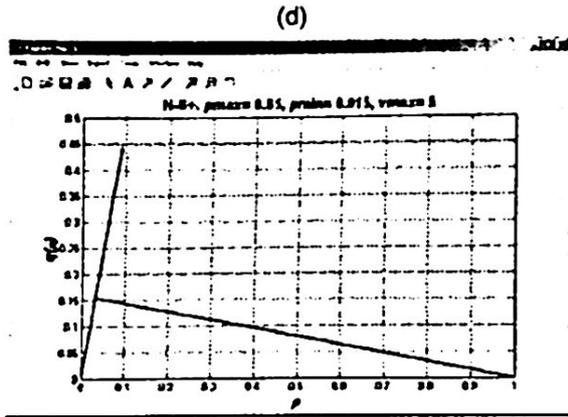


(b)



(c)





(e)

FIG. 7.1 Obtención del diagrama fundamental para NS+.

- (a) Datos generados por el programa TrafficCA.java
- (b) Identificación de las regiones estable e inestable en colores distintos.
- (c) Obtención de la ecuación de ajuste para la región estable.
- (d) Obtención de la ecuación de ajuste para la región inestable.
- (e) El diagrama fundamental.

### SIMULACIÓN "EN TIEMPO REAL"

Les hemos llamado "en tiempo real" debido a que en ellos es posible observar una "toma aérea" de una autopista cerrada en la cual circulan automóviles que siguen el comportamiento de N-S o N-S+ a la vez que también dinámicamente es posible generar el diagrama fundamental del AC simulado, variando manualmente la densidad del mismo. Ver figuras 7.2 y 7.3.

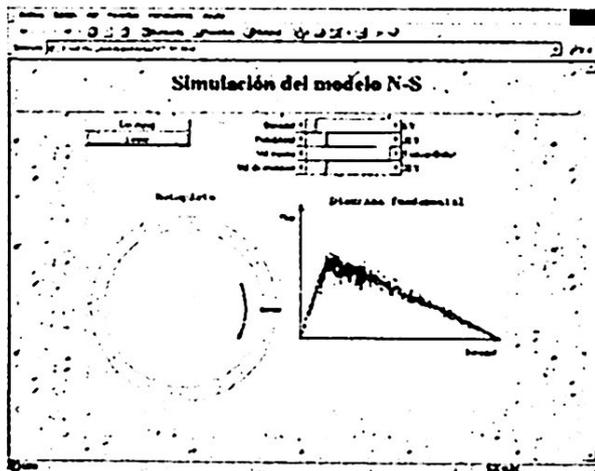


FIG. 7.2 Simulador de N-S

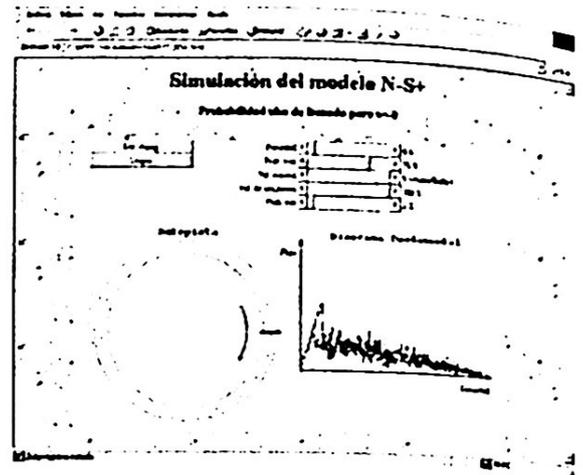


FIG. 7.3 Simulador de N-S+

- Aunque el comportamiento tipo de N-S+ que se menciona en el primer punto para mayoría de los casos, la forma particular Diagrama Fundamental (DF) depende de valores que se asignen a las dos probabilidades de entrada al modelo: la probabilidad máxima  $p_{max}$  para autos lentos y la mínima  $p_{min}$  autos rápidos.
- Con NS+ sólo es válido hablar de la función  $q = f(\rho)$  fuera de la región de metaestabilidad. En esta región los valores de  $q$  no son unívocos con respecto a  $\rho$ .
- Considerando una transición del sistema estado congestionado a un estado de flujo libre o laminar, se localizó en el DF un valor de de salida de congestión  $q_{sal} \neq q_{max}$  específicamente  $q_{sal} < q_{max}$ . Como general observamos a su vez que correspondientes valores de densidad cumplirían  $\rho_{sal} < \rho_{max}$ .
- Resumiendo lo señalado en los puntos anteriores y con respecto a la transición estado inestable a estable en el DF siempre ocurrió  $(\rho_{sal}, q_{sal}) \neq (\rho_{max}, q_{max})$ .
- En las simulaciones realizadas para la obtención de datos y posterior generación del igualmente se calcularon valores de flujo menos 50 ocasiones para cada valor densidad  $\rho \in [0.0 .. 1.0]$ . Observamos que los valores obtenidos para el flujo  $q$  no son iguales casi nunca, aunque sí similares. La variabilidad de estos valores calculados la percibimos bastante mayor que en el caso N-S. Tampoco observamos algún patrón de repetición conjunto obtenido para cada valor de  $\rho$ .
- Observamos que mientras mayor sea diferencia entre  $p_{max}$  y  $p_{min}$  es más notoria aparición de metaestabilidad en el. Obsérvese los diagramas de la figura 7.4. ejemplo.

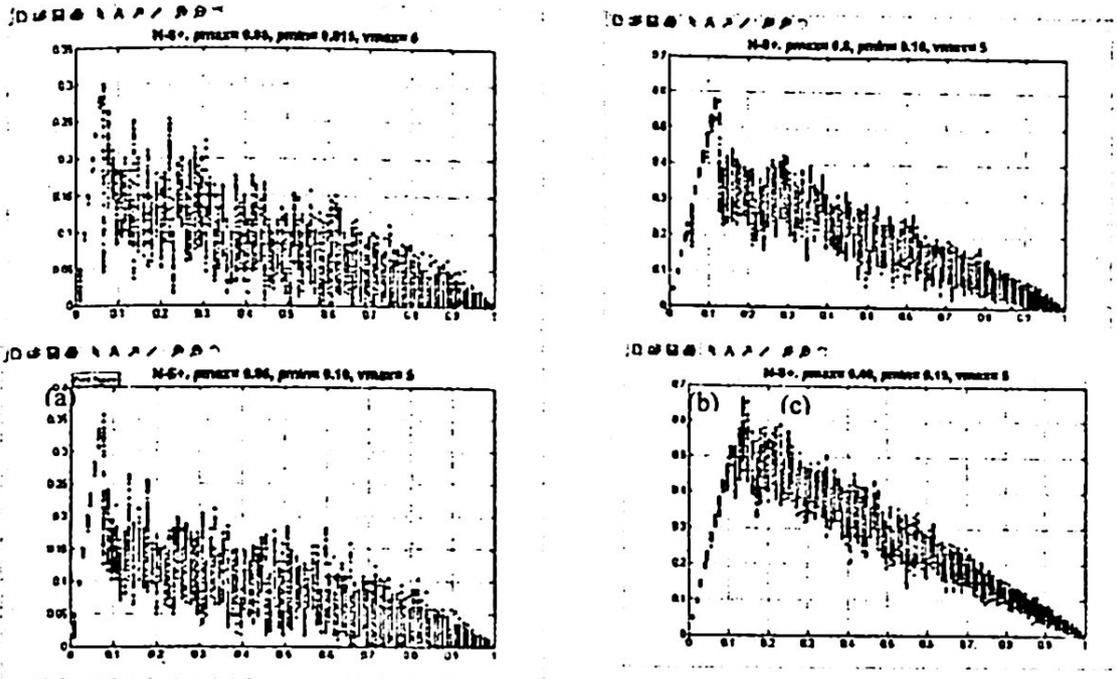


FIG. 7.4 Variaciones de  $\rho_{max}$  y  $\rho_{min}$  en N-S+ con  $v_{max} = 5$  en todos los casos.  
 (a)  $\rho_{max} = 0.85$  y  $\rho_{min} = 0.015$

(b)  $\rho_{max} = 0.85$  y  $\rho_{min} = 0.10$   
 (c)  $\rho_{max} = 0.60$  y  $\rho_{min} = 0.10$   
 (d)  $\rho_{max} = 0.40$  y  $\rho_{min} = 0.15$

### 8. Conclusiones

- Se obtuvo un AC con comportamiento metaestable. Este AC fue denominado N-S+.
- El comportamiento densidad-flujo de N-S+ logró ser verificado mediante medios computacionales.
- Fue posible inspeccionar visualmente el comportamiento de N-S+ por medio de simulaciones computacionales.

### Referencias

[1] Biham, O., Middleton, A., and Levine, D., "self-Organization and Dynamical transition in Traffic flow Models", Physical review A, vol46, num 10, pp6124-6127, 1992  
 [[2] M. James Lighthill and G.B. Whitman. On Kinematics waves, II. A Theory of traffic flow on long crowded roads. Proceedings of the Royal Society A, 229:317-345, 1955.  
 [3] D. Helbing, H.J. Hermann and M Schreckenberg, Traffic and Granular Flow 99, Springer-Verlag ISBN 3-540-67091 Germany.2000.  
 [4] Blue V, Bonetto F and Embrechts M, " A cellular automata of vehicular self organization and nonlinear speed transitions", Trasportation Research Board Annual Meeting, Washington DC, 1994.  
 [5] Kuhne,R. in: Highway Capacity and Level of service, Proc. Int. Symp. Highway capacity, 1991[6] Nagatani T "Jamming transition in the traffic flow model with two-level crossing", Physical Review E, vol 48, num 5 pp 3290-3294, 1993

[7] Nagatani T " Self organization and phase transition in the traffic flow model of a two-lane roadway", Journal of Physics A, vol 26 pp781-787.1993  
 [8] Nagel K "Particle hopping models and traffic flow theory", Physical Review E, vol 3, num 6 pp 4655-4672, 1996  
 [9] Nagel K Barret C L and Rickert M " Parallel traffic micro-simulation by cellular automata", transportation Research C, 1998  
 [10]Nagel, K., Hermann,H, " Deterministic Models for traffic Jams", Physica A,Vol199, pp254-263, 1993  
 [11] Nagel K and M Schreckenberg " A cellular automata model for freeway traffic", Journal de Physique, vol2 pp2221-2229, 1992  
 [12] Nagel K and S Rasmussen , " Traffic at the edge of chaos", Proceedings of the Fourth International workshop on the synthesis and simulation of living systems, MIT Press, pp22-235, 1994  
 [13] Rathi, A.K and Santiago, A.J., " The new NETSIM Simulation Program", Traffic Engineering and control, pp317-320, 1990  
 [[14] Rathi, A.K and Santiago, A.J., " The new NETSIM Simulation Program", Traffic Engineering and control, pp317-320, 1990  
 [15] Rickert M, Nagel K, Schreckenberg M, and Latour A, " Two lane traffic simulations using cellular automata", Physica A, 1995.

[16] Schadschneider A Schreckenberg M "cellular automata models and traffic flow", journal of Physics A, vol 26, pp679-683, 1993.

[17] Schreckenberg M and Nagel K "Discrete Stochastic models for traffic flow", Physical Review E, vol 51, num 4 pp 2939-2949, 1995

[18] Villar L and De Sausa A, "Cellular automata models for general traffic conditions on a line", Physica A, vol 211, pp84-92, 1994.

[19] FRESIM, US Department of Transportation , Washinton DC, 1996

[20] Gerlough, D. And Humber J., Traffic Flow Theory, A monograh Transportation Research Council, 165, 1991.

[21] Téllez Castillo, G. "Los fractales: un punto de convergencia de los Autómatas Celulares y los Sistemas Dinámicos", Master Thesis, Computer Science Program, CIC-IPN, México,1998.

[22] Frisch U., Hasslacher B., Pomeau Y., Phys. Rev Lett. 56 (1986) 1505

[23] B.S. Kerner and H. Rehborn, "Experimental features and characteristics of traffic jams". Phys. Rev. E 53, R1297; 1996

[24] B.S. Kerner and H. Rehborn, "Experimental properties of complexity in traffic flow". Phys. Rev. E 53, R4275. 1996

[25] B.S. Kerner and H. Rehborn, "Experimental properties of phase transitions in traffic flow". Phys. Rev. Letters, 79(2), 4030-4033. 1997

[26] H. Fuks, "Exact results for deterministic cellular automata traffic models". Institute of reserch in Mathematical sciences, Ontario, Canadá. 2001.

[27] P. Cockshott and George McCaskill, "Use of high speed cellular automata machine to simulate road traffic". 2000.

[28] L. Roters, S. Lübeck and D. Usadel, "Critical behavior of traffic flow model". Phys. Rev. E 59, R2672; 1999

[29] B. Chopard, A. Dupuis, and P. Luthi, "A cellular automata model for urban traffic and its application to the city of Geneva", University of Geneva, CUI. 1997.

[30] H. Y. Lee, H.-W. Lee, and D. Kim, "Phase diagram of congested traffic flow: An empirical study". Phys. Rev. E 62, R4737; 2001